

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE AGUASCALIENTES

DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

ACADEMIA DE MÉTODOS ESTADÍSTICOS AVANZADOS A2

Formulario para los cursos:  
Estadística I  
Probabilidad y estadística  
Estadística descriptiva y probabilidad

*Author:*

Dr. José Antonio GUERRERO DÍAZ DE LEÓN

2023

## 1 ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

Dada una muestra  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , se definen

### Frecuencias

absolutas	$n_i$
relativas	$f_i = \frac{n_i}{n}$
porcentajes	$p_i = f_i \times 100$
absolutas acumuladas	$N_i = \sum_{k=1}^i n_k$
relativas acumuladas	$F_i = \frac{N_i}{n}$

$$\text{Media } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{\sum_{k=1}^r x_k n_k}{n}$$

$$\text{Mediana } \tilde{x} = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})} & n \text{ impar} \\ \frac{x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}}{2} & n \text{ par} \end{cases}$$

### Varianza

$$S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{k=1}^r (x_k - \bar{x})^2 n_k}{n}$$

$$S_{n-1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{k=1}^r (x_k - \bar{x})^2 n_k}{n-1}$$

$$\text{Rango } R = x_{(n)} - x_{(1)}$$

Cuantiles  $C_p, 0 \leq p \leq 1$

$$C_p = (1 - \Delta)x_{(\overline{r})} + \Delta x_{(\overline{r}+1)}$$

donde  $r = p(n-1) + 1$ ,

$\Delta$ =parte decimal,  $\overline{r}$ =parte entera

- Cuartiles  $Q_k = C_{\frac{k}{4}}, k = 1, 2, 3$
- Deciles  $D_k = C_{\frac{k}{10}}, k = 1, 2, \dots, 9$
- Percentiles  $P_k = C_{\frac{k}{100}}, k = 1, 2, \dots, 99$

$$\text{Rango intercuartilico } RIQ = Q_3 - Q_1$$

$$\text{Coeficiente de simetría } \alpha_3 = \frac{M_3}{S_n^3}$$

$$\text{con } M_3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3$$

$$\text{Coeficiente de curtosis } \alpha_4 = \frac{M_4}{S_n^4}$$

$$\text{con } M_4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4$$

### Diagrama de caja y brazos

$$CI_i = Q_1 - 1.5 \times RIQ$$

$$CI_s = Q_3 + 1.5 \times RIQ$$

## 2 TEORÍA DE EVENTOS

### Conmutatividad

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

### Leyes de Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

### Complementario

$$A \cap A^c = \emptyset$$

$$A \cup A^c = \Omega$$

$$\Omega^c = \emptyset$$

### Distributividad

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

### Asociatividad

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

## 3 PROBABILIDAD

### Axiomas de Kolmogorov

- $P(A) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$
- Si  $A$  y  $B$  son excluyentes  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

### Probabilidad condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ si } P(B) > 0$$

### Regla del producto

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

### Leyes de suma

- $P(A^c) = 1 - P(A)$
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

### Probabilidad total

- $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)$
- $P(B) = \sum_{i=1}^k P(B|A_i)P(A_i)$  donde  $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$  forman una partición de  $\Omega$

### Regla de Bayes

- $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$
- $P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)}$
- $P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^k P(B|A_j)P(A_j)}$

### Independencia

$A$  y  $B$  son independientes sí y sólo si

- $P(A|B) = P(A)$
- $P(B|A) = P(B)$
- $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

## 4 DISTRIBUCIONES DISCRETAS

En las propiedades,  $X \sim f = f_X$  y  $Y \sim f_Y$  y  $c \in \mathbb{R}$

### Función de distribución

$$f(x) \geq 0$$

$$\sum_x f(x) = 1$$

$$\text{Si } X \sim f, P(X = x) = f(x)$$

### Función de distribución acumulada

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y \leq x} f(y)$$

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

$$\text{Si } x \leq y \text{ entonces } F(x) \leq F(y)$$

### Valor esperado

$$E[X] = \sum_x x f(x)$$

$$E[c] = c$$

$$E[cX] = cE[X]$$

$$E[X + c] = E[X] + c$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

$$E[g(X)] = \sum_x g(x) f(x)$$

### Varianza

$$\begin{aligned} V[X] &= E[(X - E[X])^2] \\ &= \sum_x (x - E[X])^2 f(x) \end{aligned}$$

$$V[c] = 0$$

$$V[cX] = c^2 V[X]$$

$$V[X + c] = V[X]$$

$$\text{Si } X \text{ y } Y \text{ son independientes, } V[X + Y] = V[X] + V[Y]$$

$$SD[X] = \sqrt{V[X]}$$

### Momentos

$$m_r = E[X^r] = \sum_x x^r f(x)$$

$$m_1 = E[X]$$

$$m_2 = V[X] + E[X]^2$$

$$V[X] = m_2 - m_1^2$$

### Función generadora de momentos

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_x e^{tx} f(x)$$

$$m_k = \left. \frac{d^k M(t)}{dt^k} \right|_{t=0}$$

$$\text{Si } Y = cX, M_Y(t) = M_X(ct)$$

$$\text{Si } Y = X + c, M_Y(t) = e^{ct} M_X(t)$$

$$\text{Si } Y = \sum_{i=1}^n X_i,$$

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t)$$

$$\text{Si } X \text{ y } Y \text{ son dos variables tales que } M_X(t) = M_Y(t),$$

$$\text{entonces } f_X(x) = f_Y(x)$$

## 5 REPASO DE CÁLCULO

### Derivadas

$$\bullet \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\bullet \frac{de^x}{dx} = e^x$$

$$\bullet \frac{d \sin(x)}{dx} = \cos(x)$$

$$\bullet \frac{d \cos(x)}{dx} = -\sin(x)$$

$$\bullet \frac{dUV}{dx} = U \frac{dV}{dx} + V \frac{dU}{dx}$$

### Integrales

$$\bullet \int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\bullet \int e^x dx = e^x + c$$

$$\bullet \int \cos(x) dx = \sin(x) + c$$

$$\bullet \int \sin(x) dx = -\cos(x) + c$$

$$\bullet \int U dV = UV - \int V dU$$

### 6 DISTRIBUCIONES CONTINUAS

En las propiedades,  $X \sim f = f_X$ ,  $Y \sim f_Y$  y  $c \in \mathbb{R}$

#### Función de densidad

$$f(x) \geq 0$$

$$\int f(x)dx = 1$$

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

#### Función de distribución acumulada

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy$$

- $0 \leq F(x) \leq 1$
- Si  $x \leq y$  entonces  $F(x) \leq F(y)$
- $F'(x) = f(x)$

#### Valor esperado

$$E[X] = \int xf(x)dx$$

- $E[c] = c$
- $E[cX] = cE[X]$
- $E[X + c] = E[X] + c$
- $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$

$$E[g(X)] = \int g(x)f(x)dx$$

#### Varianza

$$V[X] = E[(X - E[X])^2]$$

$$= \int (x - E[X])^2 f(x)dx$$

- $V[c] = 0$
- $V[cX] = c^2V[X]$
- $V[X + c] = V[X]$
- Si  $X$  y  $Y$  son independientes,  $V[X + Y] = V[X] + V[Y]$

$$SD[X] = \sqrt{V[X]}$$

#### Covarianza

$$Cov[X, Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

- $Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$
- $V[X + Y] = V[X] + V[Y] + 2Cov[X, Y]$

#### Función gamma

- $\Gamma(x) = (x - 1)\Gamma(x - 1)$
- $\Gamma(n) = (n - 1)!$  si  $n \in \mathbb{N}$
- 

$\Gamma(1/6)$	$= 5.5663$	$\Gamma(1/5)$	$= 4.5908$
$\Gamma(1/4)$	$= 3.6256$	$\Gamma(1/3)$	$= 2.6789$
$\Gamma(2/5)$	$= 2.2182$	$\Gamma(1/2)$	$= \sqrt{\pi}$
$\Gamma(3/5)$	$= 1.4892$	$\Gamma(2/3)$	$= 1.3541$
$\Gamma(3/4)$	$= 1.2254$	$\Gamma(4/5)$	$= 1.1642$

#### Dist. gamma

$$F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{\beta-1} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}$$

#### Estandarización

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1),$$

$$\text{donde } \mu = E[X] \text{ y } \sigma = \sqrt{V[X]}$$

#### Momentos

$$m_k = E[X^k] = \int x^k f(x)dx$$

- $m_1 = E[X]$
- $m_2 = V[X] + E[X]^2$
- $V[X] = m_2 - m_1^2$

#### Función generadora de momentos

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int e^{tx} f(x)dx$$

- $m_k = \left. \frac{d^k M(t)}{dt^k} \right|_{t=0}$
- Si  $Y = cX$ ,  $M_Y(t) = M_X(ct)$
- Si  $Y = X + c$ ,  $M_Y(t) = e^{ct} M_X(t)$
- Si  $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ ,  
 $M_Y(t) = M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t)$
- Si  $M_X(t) = M_Y(t)$ , entonces  $f_X(x) = f_Y(x)$

### 7 DISTRIBUCIONES CONJUNTAS

#### Propiedades

- $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$
- $\int \int f_{X,Y}(x, y)dydx = 1$

#### Valor esperado

$$E[g(X, Y)] = \int \int g(X, Y)f_{X,Y}(x, y)dydx$$

#### Acumulada

$$F(a, b) = \int_{-\infty}^a \int_{-\infty}^b f(x, y)dydx$$

#### Marginales

- $f_X(x) = \int f_{X,Y}(x, y)dy$
- $f_Y(y) = \int f_{X,Y}(x, y)dx$

#### Condicionales

- $f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$
- $f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$

Nombre de la distribución	Función de distribución de probabilidad	Dominio	Parámetros	Media $E[X]$	Varianza $V[X]$	Generadora de momentos $M_X(t)$
Uniforme	$P(X = x) = \frac{1}{N}$	$x \in \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$		$\bar{x}$	$S_N^2$	$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n e^{tx_i}$
	$P(X = x) = \frac{1}{N}$ $N = b - a + 1$	$x = a, \dots, b$	$a$ : Límite inferior $b$ : Límite superior	$\frac{a + b}{2}$	$\frac{N^2 - 1}{12}$	$\frac{e^{at} - e^{(b+1)t}}{N(1 - e^t)}$
Bernoulli	$P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x}$	$x = 0, 1$	$p$ : Probabilidad de éxito	$p$	$p(1 - p)$	$pe^t + (1 - p)$
Binomial	$P(X = x) = \binom{N}{x} p^x(1 - p)^{N-x}$	$x = 0, \dots, N$	$p$ : Probabilidad de éxito $N$ : Número de ensayos	$Np$	$Np(1 - p)$	$(pe^t + (1 - p))^N$
Geométrica	$P(X = x) = p(1 - p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \dots$	$p$ : Probabilidad de éxito	$\frac{1}{p}$	$\frac{1 - p}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1 - (1 - p)e^t}$
	$P(Y = y) = p(1 - p)^y$ $Y = X - 1$	$y = 0, 1, \dots$	$p$ : Probabilidad de éxito	$\frac{1 - p}{p}$	$\frac{1 - p}{p^2}$	$\frac{p}{1 - (1 - p)e^t}$
Binomial negativa	$P(X = x) = \binom{x-1}{r-1} p^r(1 - p)^{x-r}$	$x = r, r + 1, \dots$	$p$ : Probabilidad de éxito $r$ : Número de éxitos deseados	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1 - p)}{p^2}$	$\left(\frac{pe^t}{1 - (1 - p)e^t}\right)^r$
Poisson	$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$	$x = 0, 1, \dots$	$\lambda$ : tasa	$\lambda$	$\lambda$	$e^{\lambda(e^t - 1)}$
Hipergeométrica	$P(X = x) = \frac{\binom{K}{x} \binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$x = A, \dots, B$ $A = \max(0, n + K - N)$ $B = \min(n, K)$	$N$ : Tamaño de la población $n$ : Tamaño de la muestra $K$ : Tamaño de subconjunto de interés	$n \frac{K}{N}$	$\frac{nK(N - K)(N - n)}{N^2(N - 1)}$	No es práctica

Nombre	Función de densidad	Parámetros	Media $E[X]$	Varianza $V[X]$	Generadora de momentos $M_X(t)$
Uniforme	$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ $a \leq x \leq b$	$a$ : localización (límite inferior) $b$ : localización (límite superior) $-\infty < a, b < \infty$ $a < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$
Exponencial	$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $x > 0$	$\lambda$ : tasa $\lambda > 0$ $\lambda = 1/\theta$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t} \quad t < \lambda$
	$f_X(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$ $x > 0$	$\theta$ : escala $\theta > 0$	$\theta$	$\theta^2$	$\frac{1}{1 - t\theta} \quad t < \frac{1}{\theta}$
Normal	$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty < x < \infty$	$\mu$ : localización (central) $-\infty < \mu < \infty$ $\sigma$ : escala $\sigma > 0$	$\mu$	$\sigma^2$	$e^{\mu t + \frac{t^2 \sigma^2}{2}}$
Gamma	$f_X(x) = \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\lambda x}$ $x > 0$	$\lambda$ : tasa $\beta$ : forma $\beta, \lambda > 0$	$\frac{\beta}{\lambda}$	$\frac{\beta}{\lambda^2}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\beta \quad t < \lambda$
	$f_X(x) = \frac{1}{\theta^\beta \Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\frac{x}{\theta}}$ $x > 0$	$\theta$ : escala $\beta$ : forma $\beta, \theta > 0$	$\beta\theta$	$\beta\theta^2$	$\left(\frac{1}{1 - t\theta}\right)^\beta \quad t < \frac{1}{\theta}$
Weibull	$f_X(x) = \beta \alpha^\beta x^{\beta-1} e^{-(\alpha x)^\beta}$ $x > 0$	$\alpha$ : tasa $\beta$ : forma $\alpha, \beta > 0$ $\alpha = \frac{1}{\theta}$	$\frac{1}{\alpha} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$	$\frac{1}{\alpha^2} \left[ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^2 \right]$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k! \alpha^k} \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}\right)$ $\beta \geq 1$
	$f_X(x) = \frac{\beta}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta}$ $x > 0$	$\theta$ : escala $\beta$ : forma $\theta, \beta > 0$	$\theta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$	$\theta^2 \left[ \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^2 \right]$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \theta^k}{k!} \Gamma\left(1 + \frac{k}{\beta}\right)$ $\beta \geq 1$